

Approfondissements

Ce document détaille et explicite les différentes rubriques du document 1 précédent.

I. Une classification possible inspirée des recherches de Catherine Houdement et Gérard Vergnaud

En nous appuyant sur ces recherches, nous pouvons retenir de cette classification les quatre catégories suivantes :

- **Les situations ou problèmes** permettant d'introduire une notion nouvelle ou d'étendre de façon significative son domaine d'application
- **Les problèmes élémentaires ou basiques** qui se caractérisent par un énoncé plutôt standard, sans difficulté de syntaxe ou de lecture, la mobilisation d'une opération dont la reconnaissance doit être automatisée à un niveau de scolarité donné. Ce type de problème peut être décrit, pour une grande part, à partir des catégories de la classification de Vergnaud (structures additives ici). Notons qu'un problème peut être élémentaire à un niveau de scolarité donné et être un problème du type précédent à un niveau antérieur.
- **Les problèmes complexes** qui peuvent être décrits comme des agglomérats de problèmes élémentaires pouvant ou non comporter dans l'énoncé des questions intermédiaires. Ils demandent une certaine prise d'initiative de la part de l'élève.
- **Les problèmes atypiques ou problèmes pour chercher** qui se caractérisent essentiellement par des procédures de résolution expertes qui ne seront pas enseignées aux élèves au moment où ils sont proposés. Ils peuvent alors être résolus par d'autres procédures moins expertes mais accessibles à un niveau donné de scolarité (essai/erreur, méthode par fausse position, mobilisation de schémas, etc.).

Selon la catégorie de problèmes, les attentes du professeur ne sont pas les mêmes : l'élève devra par exemple, restituer à terme une procédure experte (problèmes élémentaires) ou planifier et mettre en œuvre une démarche de résolution (problème complexe), ou bien encore mettre en œuvre une démarche de recherche (problèmes atypiques).

Ce module aborde des problèmes qui, à un moment de la scolarité, seront reconnus comme élémentaires, relevant des structures additives et notamment ceux qui se résolvent de manière experte grâce à une soustraction.

G. Vergnaud a élaboré une classification des problèmes pouvant être rencontrés au cours de la scolarité obligatoire, notamment du cycle 1 au cycle 3. Nous proposons ci-dessous une classification non exhaustive s'en inspirant. Elle ne porte que sur les problèmes relevant du champ conceptuel des structures additives.

Les problèmes relevant des « **structures additives** », c'est-à-dire dont la résolution nécessite la mobilisation d'une (ou plusieurs) addition(s) ou soustraction(s), se répartissent comme le suggère G. Vergnaud selon les quatre catégories suivantes :

- Les problèmes relevant d'une relation du type **partie-partie-tout**
- Les problèmes correspondant à une **transformation d'état**
- Les problèmes correspondant à une **comparaison d'états**
- Les problèmes relevant d'une **composition de transformations**

Voici ci-dessous un tableau détaillant chaque catégorie illustrée par un exemple. Les problèmes mobilisant une soustraction sont indiqués en caractères gras. Nous n'avons évoqué dans les analyses proposées que des énoncés faisant intervenir deux états ou deux parties ou deux transformations. Différentes catégories faisant intervenir plus d'états ou parties ou transformations peuvent être envisagées.

Afin de faciliter la compréhension, nous avons fait le choix, comme dans les énoncés (avec les billes) de la seconde tâche de cette première partie, de nous limiter à un même contexte (voitures, motos et places de parking) et de conserver les mêmes données numériques.

Notons toutefois, comme cela a déjà été mis en évidence dans les analyses proposées, qu'un même problème peut relever de plusieurs catégories selon la manière dont il est interprété par l'élève, comme le montre cet exemple :

« Il y a 27 jetons sur la table. Certains jetons sont cachés sous un gobelet. 12 jetons sont visibles. Combien de jetons sont cachés sous le gobelet ? »

Point de vue « Partie-Partie-Tout » : La collection de 27 jetons est partagée en deux sous-collections : les jetons cachés et les jetons visibles, recherche d'une partie. ($12 + ? = 27$)

Point de vue « Transformation d'état » : état initial : collection de 27 jetons, état final : 12 jetons visibles, recherche de la transformation (ici négative) : « cacher des jetons ». ($27 - ? = 12$)

STRUCTURES ADDITIVES			
Types de problèmes	Élément recherché	Opération(s) nécessaire(s)	Exemple
Relation du type partie-partie-tout	Recherche du tout connaissant les parties	Addition	<i>Dans un parking, 12 places sont occupées par des voitures. 15 places sont libres. Combien y a-t-il de places dans ce parking ?</i>
	Recherche d'une partie connaissant le tout et l'autre partie	Soustraction	<i>Il y a 27 places dans un parking. 12 places sont occupées par des voitures. Combien y a-t-il de places libres ?</i>
Transformations d'états	Transformation additive, recherche de l'état final	Addition	<i>Il y avait 12 voitures garées dans le parking. 15 voitures entrent pour se garer dans le parking. Combien de voitures sont garées ?</i>
	Transformation soustractive, recherche de l'état final	Soustraction	<i>Il y avait 27 voitures garées dans le parking, 12 voitures sont sorties du parking. Combien de voitures sont encore garées ?</i>
	Transformation additive recherche de l'état initial	Soustraction	<i>Il y a 27 voitures garées à midi dans le parking. Au cours de la matinée, 12 voitures se sont garées. Combien y avait-il de voitures garées dans le parking ce matin ?</i>
	Transformation soustractive recherche de l'état initial	Addition	<i>Au cours de la matinée, 15 voitures sont sorties du parking, il y a à midi 12 voitures garées dans le parking. Combien y avait-il de voitures garées ce matin ?</i>
	Transformation additive recherche de la transformation	Soustraction	<i>Ce matin, il y avait 12 voitures garées dans le parking. A midi il y en a 27. Aucune voiture n'est sortie. Combien de voitures sont entrées dans le parking au cours de la matinée ?</i>

				<i>sorties. Y a-t-il plus ou moins de voitures après ces deux heures et combien en plus ou en moins ? (aucune voiture n'est entrée)</i>
	Composée de transformations de signes différents Recherche de la transformation composée	Transformation positive plus grande en valeur absolue	Soustraction	<i>Dans un parking, 12 voitures sont sorties et 27 voitures sont entrées. Y a-t-il plus ou moins de voitures dans le parking et combien en plus ou en moins ?</i>
		Transformation positive plus petite en valeur absolue	Soustraction	<i>Dans un parking, 12 voitures sont entrées et 27 voitures sont sorties. Y a-t-il plus ou moins de voitures dans le parking et combien en plus ou en moins ?</i>
	Composée de transformations de mêmes signes Recherche d'une transformation connaissant la transformation composée et l'autre transformation	Transformations additives	Soustraction	<i>Nicolas compte les voitures qui entrent dans un parking pendant deux heures. 27 voitures sont entrées. Au cours de la première heure, 12 voitures sont entrées. Combien de voitures sont entrées au cours de la deuxième heure ?</i>
		Transformations soustractives	Soustraction	<i>Nicolas compte les voitures qui sortent d'un parking pendant deux heures. 27 voitures sont sorties. Au cours de la première heure, 12 voitures sont sorties. Combien de voitures sont sorties au cours de la deuxième heure ?</i>
	Composée de transformations de signes différents Recherche d'une transformation	Transformation positive plus grande en valeur absolue	addition	<i>Nicolas compte les voitures qui entrent et qui sortent d'un parking pendant une heure. Au bout d'une heure il y a 12 voitures de plus dans le parking. 15 voitures sont sorties. Combien de voitures sont entrées ?</i>
		Transformation positive plus	addition	<i>Nicolas compte les voitures qui entrent et qui sortent d'un parking. Au bout d'une heure il y a 12 voitures de moins dans le</i>

	connaissant la transformation composée et l'autre transformation	petite en valeur absolue		<i>parking. 15 voitures sont entrées. Combien de voitures sont sorties ?</i>
--	--	--------------------------	--	--

I. Les variables de l'énoncé, un outil pour installer de manière durable la reconnaissance de l'opération en jeu dans un problème élémentaire

Définitions et exemples de variables

Un élève d'un niveau donné aura maîtrisé un type de problème quand il sera capable de résoudre tout énoncé relevant de cette catégorie quels que soient le contexte et les données intervenant dans l'énoncé, quelle que soit la modalité de travail.

On appellera variable de la situation, tout élément pouvant varier dans l'énoncé ou dans les modalités de travail des élèves sans changer le problème lui-même.

L'enseignant peut jouer sur différentes catégories de variables : les variables numériques (choix des nombres et relations entre les nombres choisis), le nombre de données numériques, le contexte de l'énoncé (et le lexique utilisé), le type de grandeur, la présence ou non de données inutiles.

Les variables numériques

- La taille des nombres (25 ; 0,025 ; 25 000 000) ;
- Le domaine numérique : entiers naturels, décimaux, rationnels),
- La désignation du nombre ($0,5$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{50}{100}$; un demi, cinq dixièmes, etc.)
- Les relations de type additive entre les nombres : 75 et 15, 5472 et 402, 45 et 18...
- L'ordre dans lequel apparaissent les données
- Le nombre de données numériques utiles ou inutiles

Le contexte de l'énoncé

- Contexte plus ou moins familier et convoquant plus ou moins explicitement addition ou soustraction : achat ou dépense, gain ou perte, avancer ou reculer, etc.
- Énoncé décontextualisé, contexte mathématique, avec ou sans appel à une grandeur

Type de grandeur et unités de mesure

- Grandeurs simples : prix, longueur, masse, capacité, durée, grandeur discrète (25 jetons, 12 personnes, etc.),
- Grandeurs multiples : aire, volume,
- Grandeurs quotients : vitesse, débit
- Grandeur repérable : température

Modalités de travail

- Problème donné oralement ou par écrit
- Temps limité ou non
- Calcul mental, calcul en ligne, calcul posé
- Exigence d'un format de rédaction de la solution
- Usage du cahier de brouillon
- Travail individuel ou collectif (partage des tâches)

Le professeur peut jouer progressivement ou simultanément sur ces différentes variables, comme l'illustre les exemples suivants.

Exemples d'énoncés relevant d'une comparaison d'états (ou de mesure)

Exemple 1 : Pierre a 12 billes, Paul en a 23. Paul a-t-il plus ou moins de billes que Pierre ? Combien en plus ou en moins ?

Exemple 2 : Pierre a 59 billes, Paul en a 159. Paul a-t-il plus ou moins de billes que Pierre ? Combien en plus ou en moins ? (*Augmentation de la taille des nombres en jeu (entiers naturels) et relation « simple » entre les deux nombres*)

Exemple 2 : Pierre a 54 billes, Paul en a 117. Paul a-t-il plus ou moins de billes que Pierre ? Combien en plus ou en moins ? (*Augmentation de la taille des nombres (entiers naturels) en jeu et relation entre les deux nombres moins accessible*)

Exemple 3 : Un vendeur a vendu 12 mètres de corde le premier jour. Le second jour, il a vendu 23 mètres de cette même corde. A-t-il vendu plus ou moins de corde le second jour. Combien en plus ou en moins ? (*Changement du contexte : mesure des longueurs*)

Exemple 4 : Pierre a travaillé 12 heures la première semaine. La seconde semaine, il a travaillé 23 heures. A-t-il travaillé plus ou moins la seconde semaine ? Combien en plus ou en moins ? (*Changement de contexte, mesure de durées*)

Exemple 5 : Un vendeur a reçu un lot de pots de peinture. Le premier jour, il a vendu un quart de son lot. Le second jour, il a vendu trois huitièmes du lot. A-t-il vendu plus ou moins de pots de peinture le second jour que le premier ? Quelle fraction du lot en plus ou en moins ? (*Changement de domaine numérique : fractions*)

Exemple 6 : Pierre la première journée s'est entraîné à courir pendant 1 heure 35 minutes, la seconde journée, il a couru pendant trois quarts d'heure. A-t-il couru plus ou moins longtemps la seconde journée ? Combien en plus ou en moins ? (*Changement de contexte, mesure de durées, intervention de différentes unités*).

1. Exemple 7 : La distance entre la Terre et le Soleil est d'environ 149 600 000 km, la distance entre Mars et le Soleil est d'environ 228 000 000 km. Mars est-elle plus éloignée ou plus proche du Soleil que la Terre ? Combien en plus ou en moins ? (*Changement de contexte : distances astronomiques*)