

Exemples de cheminements cognitifs visant une évolution progressive vers une procédure experte

Ce document donne des pistes à l'enseignant pour organiser une progression prenant en compte les procédures personnelles des élèves.

Cette partie expose des exemples de cheminements possibles qui visent une évolution de quelques-unes des procédures explicitées ci-dessus vers une procédure experte et l'institutionnalisation progressive de celle-ci. En prenant en compte la procédure personnelle utilisée par l'élève qui a conduit au résultat, il s'agit à court ou moyen terme de l'amener à traduire sa démarche en termes de soustraction avec l'écriture associée. En effet, un objectif de l'enseignement est, à un niveau donné de la scolarité, d'automatiser la reconnaissance de l'opération en jeu dans le problème proposé. Ce dernier pourra alors être considéré comme un problème élémentaire.

Ces cheminements sont basés *a priori* sur une filiation possible entre les différentes procédures. Toutefois, certaines étapes sont peut-être à décliner plus finement ou au contraire, d'autres peuvent être omises. Il ne s'agit donc pas de les considérer comme des passages obligés mais comme d'éventuels leviers permettant d'améliorer la conceptualisation des élèves.

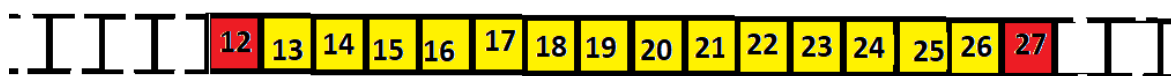
Rappelons les dix procédures analysées dans le module (les indices correspondent à leur ordre d'apparition dans les tâches proposées) classées selon 4 types de procédures présentés dans le document 3 :

- **P1 : procédure de surcomptage** mobilisant des écritures chiffrées (non organisées) des nombres de 13 à 27
- **P5 procédure de surcomptage** organisé par le recours à la droite numérique et par bonds (1 saut de 22 à 12 puis 5 sauts de 1 pour atteindre 27)
- **P10 procédure de surcomptage** à partir de 13 accompagné du dessin des billes correspondantes et comptage du nombre de celles-ci
- **P4 procédure de décomptage** de 26 à 15 avec recours aux doigts pour mémoriser le cardinal d'une des collections (12)
- **P9 procédure de décomptage** à partir de 27 en 12 bonds de 1 et en recourant à des déplacements (reculs) sur une droite numérique
- **P2 procédure de comptage** pour trouver l'écart entre deux collections (représentation figurative) dessinées et mise en relation
- **P8 procédure de comptage** s'appuyant sur les représentations figuratives de la collection initiale (27 billes), d'une sous-collection (12 billes barrées) et du comptage du nombre d'éléments de la sous-collection complémentaire
- **P3 procédure de calcul d'une addition à trou** mobilisant l'écriture additive associée
- **P6 procédure de calcul d'une soustraction** mobilisant une écriture associative
- **P7 procédure de composition de transformations** s'appuyant sur une droite graduée

1. Un premier cheminement : d'une procédure de surcomptage (procédure 10) vers des procédures s'appuyant sur des écritures mathématiques de type addition à trou (procédure 3) puis de type écriture soustractive (procédure 6) via un jeu sur les supports utilisés.

On peut le décliner par exemple selon les étapes suivantes :

- **Mobilisation des écritures chiffrées** : le passage d'un surcomptage avec les billes (**procédure 10**) à un surcomptage avec des nombres (**procédure 1**) est plutôt naturel
- **Première optimisation du surcomptage en utilisant une organisation des écritures chiffrées (piste numérique)** : le passage du surcomptage avec des nombres (P1) à un surcomptage s'appuyant sur un outil organisant et optimisant le dénombrement peut se faire par exemple en ménageant les deux étapes suivantes :
 - o une organisation du dénombrement via éventuellement une procédure de surcomptage déjà optimisée par une écriture en ligne des nombres (P1 optimisée)
13 14 15 16 17 27
 - o une procédure de surcomptage de un en un utilisant le support d'une piste numérique



- **Seconde optimisation du surcomptage en utilisant des décompositions illustrées par des bonds sur la droite numérique** : Le passage du surcomptage de un en un à un surcomptage par bonds (procédure 5) devient plus naturel comme celui du passage de la piste numérique (cf. ci-dessus) à la droite numérique
- **Traduction du déplacement sur la droite numérique par une écriture additive à trous** : il s'agit de passer de ce surcomptage par bonds (P5) en appui sur la droite numérique à l'addition à trous (procédure 3)
- **Formalisation via les relations entre les écritures** : Passage de l'écriture additive à trous à celle de l'écriture soustractive (procédure 6)

La filiation décrite ci-dessus est basée sur la mobilisation d'outils ou de représentations de plus en plus formalisés d'un point de vue mathématique. Les étapes traduisent une montée en conceptualisation d'une représentation figurative à un jeu sur des écritures formelles. Pour amener l'élève à évoluer dans ce parcours, le professeur peut soit mettre en relation et hiérarchiser les productions de différents élèves, soit introduire lui-même certains niveaux de formalisme.

Le principe est le même pour l'organisation des autres cheminements.

2. **Un deuxième cheminement : d'une procédure de décomptage avec le support des doigts (procédure 4) à la procédure experte avec l'écriture soustractive (procédure 6) via le support de la droite numérique**

On peut le décliner par exemple selon les étapes suivantes :

- **Traduction par un déplacement sur la piste ou la droite numérique d'un décomptage mobilisant les doigts** : ce déplacement peut se faire en reculant d'un en un à partir de 27 (**procédure 9**) ou par bonds, par exemple reculer de 10 puis de 2
- **Traduction de ces différents déplacements par des écritures soustractives** : par exemple des écritures du type $27 - 10 = 17$ et $17 - 2 = 15$ associées à des calculs en ligne
- **Formalisation entre les écritures soustractives en lien éventuellement avec l'apprentissage de la technique de la soustraction** : par exemple, l'écriture $27 - 12 = 15$ est plus économique

3. **Un troisième cheminement : d'une procédure de comptage pour trouver l'écart entre deux collections (procédure 2) à la procédure experte avec l'écriture soustractive (procédure 6)**

On peut le décliner par exemple selon les étapes suivantes :

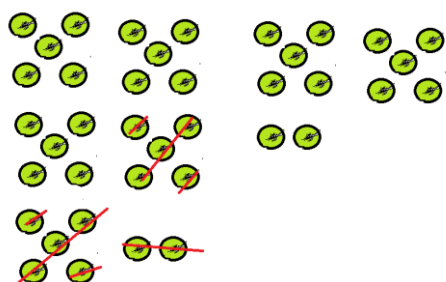
- **Mobilisation des écritures chiffrées** : le passage d'un comptage avec les billes (P2) à un comptage avec des nombres est plutôt naturel
- **Organisation des écritures chiffrées** : Le passage à une organisation de ces écritures chiffrées sous forme de deux listes d'écritures (alignées) peut alors se faire
- **Schématisation des représentations** : Une nouvelle étape consiste à passer à une première forme de schémas ayant par exemple pour support deux pistes (ou bandes) numériques situées l'une sous l'autre ; disposition permettant de visualiser une différence de deux cardinaux sous la forme d'un écart de longueurs de deux segments
- **Transformation des représentations** : une juxtaposition des deux pistes numériques (voire des deux droites numériques associées) peut permettre de rapprocher cette représentations d'une représentation plus classique pouvant déboucher sur des écritures mathématiques formelles
- **Traduction de ces différentes représentations par des écritures additives (renvoyant à l'addition à trous) ou directement par des écritures soustractives** : par exemple des écritures du type : $15 + ? = 27$ ou $27 - 12 = 15$ associées à des calculs en ligne

4. Un quatrième cheminement : d'une procédure de comptage de l'écart entre les deux collections (procédure 2) à la procédure experte avec l'écriture soustractive (procédure 6) associé à l'exploration d'une technique opératoire de la soustraction

Ce cheminement explore une autre piste, celle qui consiste à faire le lien entre une technique plutôt « primitive » (au sens de première technique susceptible d'être mobilisée) à une technique experte (P6) mobilisant une écriture soustractive via un retour au sens de la technique de la soustraction (ici plutôt anglo-saxonne).

Voici plusieurs étapes possibles permettant d'initialiser ou de revenir sur la construction de la technique.

- **Première étape : organisation des collections** à comparer pour mieux désigner leur cardinal dans notre système de numération décimale de position. On peut penser à des groupements par 5 ou par 10 des éléments des collections



- **Deuxième étape** : mise en relation de cette représentation avec la soustraction inscrite dans un tableau de numération, en décomposant les deux collections en dizaine et unités et en les disposant pour visualiser le tableau de numération (27 : première ligne et 12 : deuxième ligne)

